1983

DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

MATHEMATIQUES

1ère épreuve commune aux 3 options M, P et TA

Durée : 4 heures

L'espace euclidien est rapporté à un système d'axes orthonormés Oxyz
a, b et h désignent trois réels strictement positifs.
R est le rectangle $z = o \quad o \leqslant x \leqslant a \quad o \leqslant y \leqslant b$
S le point de coordonnées (o, o, h)
M (x,y,o) un point du plan $z = o$
i l'angle aigu de SM et de la normale en M au plan $z = o$.

1) a - Calculer l'intégrale double $I(a,b,h) = \iint_R \cos i \, \frac{dx\,dy}{\overline{SM}^2}$

On trouvera $\text{Arc tg} \, \frac{ab}{h\sqrt{a^2+b^2+h^2}}$

1) b - Expliquer pourquoi I est invariant quand on multiplie a,b et h par un réel strictement positif (On n'utilisera pas le résultat indiqué ci-dessus)

1) c - Etudier la variation de I, considérée successivement comme fonction de la seule variable a, de la seule variable b, de la seule variable h.

2) Dans cette question on suppose h constant
Montrer que dans chacun des trois cas suivants :
l'aire de R est constante
le périmètre de R est constant
la diagonale de R a une longueur constante
le maximum de I est obtenu pour $a = b$

3) On appelle A le point (a, b, o). Construire la courbe ensemble des points A si $I = \frac{\pi}{4}$ $h = 1$

4) On suppose a et b constants.
Trouver la partie régulière du développement limité de I à l'ordre trois
par rapport à h quand $h \to o^+$
et par rapport à $\frac{1}{h}$ quand $h \to +\infty$

5) On pose pour $x \in \mathbb{R}$
$J(a, b, x) = \text{Arc tg} \, \frac{x\sqrt{a^2+b^2+x^2}}{a\,b}$

a) Rappeler la relation entre I (a, b, h) et J (a, b, h) $h > o$

b) Montrer comment on peut obtenir le développement en série entière en x de la fonction J à partir de l'expression de sa dérivée soit

$$J(a, b, x) = \sum_o^\infty a_n x^n$$

Le calcul de a_n en fonction de a, b et n n'est pas demandé.

Quel est le rayon de convergence de la série ?

6) Dans cette question on étudie le cas particulier $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

a) Montrer que $J'_x(a, b, x)$ est une solution de l'équation différentielle.

$$(1 + x^2)(1 + 2x^2)y' + x(6x^2 + 5)y = 0$$

On pose $J'_x(a, b, x) = \sum_o^\infty b_n x^n$

Trouver une relation entre b_{n-2}, b_n et b_{n+2}

On pose $c_n = b_n + 2b_{n-2}$

montrer que $(n+2)\, c_{n+2} + (n+1)\, c_n = 0$

Déduire de ce qui précède les expressions de c_n, b_n puis a_n en fonction de n.

.../...

7) On désigne par R' le rectangle

$z = o \qquad o \leqslant x \leqslant c \qquad o \leqslant y \leqslant d$

avec $\qquad o < c \leqslant a \qquad o < d \leqslant b$

Δ est la partie du plan $z = o$ intérieure à R et extérieure à R'

a) Calculer $K(h) = \iint_{\Delta} \cos \; i \frac{dx\, dy}{SM^2}$

b) Montrer que la dérivée par rapport à h de $K(h)$ est du signe d'un polynôme P du 7ème degré de la variable h^2.

c) Montrer que P a une racine positive.

8) Calcul numérique

Les données sont exprimées en mètres

$a = 10 \qquad b = 8 \qquad c = 5 \qquad d = 3$

On se propose de chercher dans ce cas particulier, la position du point S pour laquelle $K(h)$ est maximum.

a) Montrer que P a une seule racine positive et donner à h^2 deux valeurs entières consécutives n et $n+1$ de façon que pour ces valeurs $P(n)$ et $P(n+1)$ soient de signes opposés.

b) En utilisant la méthode des parties proportionnelles trouver une valeur approchée de la racine positive de P.